

SUR LA DYNAMIQUE p -ADIQUE ARITHMÉTIQUE DES AUTOMORPHISMES DE L'ESPACE AFFINE

par

Sandra Marcello

Résumé. — Nous montrons que l'ensemble des périodes d'un automorphisme d'un sous-groupe du groupe des automorphismes du plan affine défini sur un corps p -adique est majoré par une constante indépendante de l'automorphisme. Nous en déduisons que ce sous groupe vérifie la conjecture de dynamique arithmétique de Silverman, ce résultat est inclus dans un résultat de L. Denis [Den95].

Abstract (On the arithmetic p -adic dynamics of automorphisms of the affine space)

We show that the set of periods for a automorphism of a sub-group of the group of automorphisms of the affine plane defined over a p -adic field is bounded above by a constant independent from the automorphism. We deduce from this result, that the Silverman's conjecture on arithmetic dynamics is true for this subgroup, this result is due to L. Denis [Den95].

1. Abridged English version

We study, over a p -adic field (a finite extension of \mathbb{Q}_p), the periodic points of automorphisms of affine spaces.

Notations and definitions. —

- p a prime number, K a p -adic field, \mathcal{O} the ring of integers of K ,
- $\text{Aut}(\mathbb{A}^r)(K)$ the group of automorphisms of affine space of dimension $r \geq 2$ defined over K .
- Let $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^r)(K)$. We also write ϕ for the rational map of the projective scheme associated to \mathbb{A}^r . We write $Z(\phi)$ the locus of non-definition of the rational map associated to ϕ . Let P be a ϕ -periodic point. We write $n_{P,\phi}$ the ϕ -period of P i.e the smallest integer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ such that $\phi^n(P) = P$.
- A generalised Hénon map is a map g of the type $g(x, y) = (p(x) - ay, x)$ where a is a non-zero constant and p is a monic polynomial of degree at least 2.
- An automorphism ϕ of $\mathbb{A}^r(K)$ is said *triangular* if it exists $F_i \in K[X_{i+1}, \dots, X_r]$ for $1 \leq i \leq r-1$, $F_r \in K$ and $a_i \in K^*$ for $1 \leq i \leq r$ such that :

$$\begin{aligned} \phi(X_1, \dots, X_r) = & (a_1 X_1 + F_1(X_2, \dots, X_r), a_2 X_2 + F_2(X_3, \dots, X_r), \\ & \dots, a_{r-1} X_{r-1} + F_{r-1}(X_r), a_r X_r + F_r). \end{aligned}$$

Classification mathématique par sujets (2000). — 37C25, 14R10, 11F85.

Mots clefs. — Itérés, automorphismes de l'espace affine, corps p -adique.

– Let \mathcal{X} be an integer proper scheme of finite type fini over $\text{Spec}(\mathcal{O})$, we write \mathcal{X}_s for the special fiber of \mathcal{X} .

Definition. — Let $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K)$. We say that ψ is a *special Hénon map* if :

– ψ is a finite product of generalised Hénon maps,

–

$$Z(\psi|_{\mathcal{X}_s}) \cap Z(\psi^{-1}|_{\mathcal{X}_s}) = \emptyset.$$

We define the group $GTHS(K) \subset \text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K)$:

$$GTHS(K) = \{ f^{-1}\phi f \text{ avec } \phi, f \in \text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K) \text{ and } \phi \text{ triangular or special Hénon map} \}.$$

Our main result is :

Theorem A. — *Let K be a p -adic field. It exists $M(K) \in \mathbb{N}$ such that $\forall \phi \in GTHS(K)$ and for all ϕ -périodic point P we have :*

$$0 \leq n_{P,\phi} \leq M.$$

2. Introduction

Après J. Silverman [Si94] et L. Denis [Den95], dans [M2] et [M3] nous nous sommes intéressée à l'étude des propriétés des itérés des automorphismes de l'espace affine définis sur un corps de nombres. En 1995, P. Morton et J. Silverman se sont notamment intéressés au comportement après réduction modulo p des points périodiques d'applications rationnelles de la droite projective [MS95], de plus, ces dernières années l'étude de la dynamique ultramétrique ou p -adique (sur \mathbb{C}_p) a pris de l'essor (voir par exemple [B00],[B01] et [R03]). Ainsi l'étude du comportement des itérés des automorphismes de l'espaces affines sur un corps p -adique apparaît comme naturelle. La notion de point périodique peut être vue comme l'*analogue* de la notion de point de torsion des variétés abéliennes. Les résultats de finitude de points de torsion de variétés abéliennes que ce soit sur un corps nombres (voir par exemple [HS00] partie C) ou sur un corps p -adique ([M86] remarque 8.4) sont classiques. Nous nous intéressons ici à ce même type de questions dans le cas d'un corps p -adique, nous obtenons même mieux à savoir une *majoration uniforme*.

Notations et définitions. — Nous noterons :

– p un nombre premier, K un corps p -adique (à savoir une extension finie de \mathbb{Q}_p), \mathcal{O} l'anneau des entiers de K ,

– $\text{Aut}(\mathbb{A}^r)(K)$ le groupe des automorphismes de l'espace affine de dimension $r \geq 2$ défini sur K .

– Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^r)(K)$. Par abus de langage, nous noterons également ϕ l'application birationnelle du schéma projectif associé à \mathbb{A}^r . Nous désignons par $Z(\phi)$ le lieu de non-définition de l'application rationnelle associée à ϕ . Soit P un point ϕ -périodique. Nous noterons $n_{P,\phi}$ la ϕ -période de P i.e le plus petit entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\phi^n(P) = P$.

– Une *application de Hénon généralisée* est une application g de la forme $g(x,y) = (p(x) - ay, x)$ où a est une constante non nulle et p est un polynôme unitaire de degré au moins 2.

– Application *triangulaire* voir la définition 4.1.

– Soit \mathcal{X} un schéma intègre propre de type fini sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$, nous noterons \mathcal{X}_s la fibre spéciale de \mathcal{X} .

Définition 2.1. — Soit $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K)$. Nous dirons que ψ est une *application de Hénon spéciale* si elle vérifie les conditions suivantes :

- ψ est un produit fini d’applications de Hénon généralisées
-

$$Z(\psi|_{\mathcal{X}_s}) \cap Z(\psi^{-1}|_{\mathcal{X}_s}) = \emptyset.$$

Nous définissons le groupe $G(K) \subset \text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K)$, par :

$$\text{GTHS}(K) = \{f^{-1}\phi f \text{ avec } \phi, f \in \text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K) \\ \text{et } \phi \text{ application triangulaire ou application de Hénon spéciale}\}.$$

Si on suppose que ϕ est une application triangulaire ou un produit fini d’applications de Hénon généralisées, on obtient $\text{Aut}(\mathbb{A}^2)(K)$. Ce résultat a été montré par S. Friedland et J. Milnor [FM89] sur \mathbb{C} et \mathbb{R} à l’aide du théorème de Jung [J42]. Nous avons vérifiée que la démonstration de S. Friedland et J. Milnor [FM89] est encore valable sur un corps p -adique, à l’aide du théorème de Jung qui a été démontré sur un corps quelconque par Makar-Limanov[M70], une autre preuve (valable pour tout corps) de ce théorème se trouve dans[C85].

Théorème A. — Soit K un corps p -adique. Il existe $M(K) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \phi \in \text{GTHS}(K)$ et pour tout point ϕ -périodique P nous avons :

$$0 \leq n_{P,\phi} \leq M.$$

Nous obtenons grâce à ce résultat une forme faible d’un résultat de dynamique arithmétique dû à L. Denis [Den95].

Définition. — Soit F un corps de nombres. Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^r(F))$.

Soit $P \in \mathbb{A}^r(F)$. Ce point P est un *point ϕ -périodique isolé* si et seulement s’il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que P est isolé (au sens de la topologie de Zariski) dans

$$\{Q \in \mathbb{A}^r(F) \text{ tel que } \phi^n(Q) = Q\}.$$

Conjecture de Silverman : Soit F un corps de nombres. Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^r(F))$. L’ensemble des points périodiques isolés de ϕ est un ensemble fini.

Corollaire B. — La conjecture de Silverman est vraie pour $\text{GTHS}(F)$.

L’approche utilisée pour démontrer le théorème A est analogue à celle utilisée par l’auteure dans [M2]. Nous obtenons une majoration uniforme pour certains automorphismes réguliers et les automorphismes triangulaires. Nous obtenons également un analogue du théorème A en dimension supérieure.

Dans le dernier paragraphe, nous faisons le lien avec la dynamique arithmétique et montrons le corollaire B.

Remerciements. — L’auteure remercie le réseau européen Arithmetic Algebraic Geometry. Ce travail a été effectué au Max-Planck Institut für Mathematik que l’auteure remercie pour les excellentes conditions de travail. L’auteure remercie très vivement Jaya Iyer de lui avoir parlé des travaux de N. Fakhruddin. L’auteure remercie N. Fakhruddin de lui avoir fait part d’un problème avec un lemme dans une version précédente de ce texte.

3. Automorphismes réguliers

3.1. définition et propriétés. — La notion d’automorphisme régulier a été introduite par N. Sibony dans [S99], leur dynamique holomorphe [S99] et arithmétique [M1] et [M2] sont intéressantes.

Définition 3.1. — Soit ϕ un automorphisme de \mathbb{A}^r , $Z(\phi)$ désigne le lieu de non-définition de l’application rationnelle (définie sur \mathbb{P}^r) associée à ϕ . L’automorphisme ϕ est dit *régulier* si ϕ n’est pas une application linéaire et :

$$Z(\phi) \cap Z(\phi^{-1}) = \emptyset.$$

Soit H l’hyperplan à l’infini, nous avons $Z(\phi) \subset H$.

Lemme 3.2. — *Un produit fini d’applications de Hénon généralisées est un automorphisme régulier.*

Ce résultat s’obtient directement en composant les applications.

Nous utiliserons la proposition suivante que nous avons démontrée, dans le cas des corps de nombres, dans [M2] (proposition 2.23), la démonstration est également valable dans le cas des corps p -adiques ou des corps finis.

Proposition 3.3. — *Soit ϕ un automorphisme régulier de \mathbb{A}^r . Alors, pour tout entier naturel n non nul ϕ^n est régulier et $Z(\phi^n) = Z(\phi)$.*

Définition 3.4. — Soit ϕ un automorphisme régulier de \mathbb{A}^r . Nous dirons que ϕ est un *automorphisme régulier spécial* si :

$$Z(\psi|_{\mathcal{X}_s}) \cap Z(\psi^{-1}|_{\mathcal{X}_s}) = \emptyset.$$

3.2. Un résultat préliminaire. —

Définition 3.5. — Soit X une variété sur un corps K . Soit $f : X \cdots \rightarrow X$ une application rationnelle. Nous dirons que P est un point *f -périodique* si f est définie en $P, f(P), f^2(P), \dots$ et il existe $n > 0$ tel que $f^n(P) = P$.

Le théorème suivant est dû à N. Fakhruddin, nous donnons ici des étapes de la preuve et renvoyons le lecteur à [F02] pour plus de détails.

Théorème 3.6. — *Soit \mathcal{X} un schéma intègre propre de type fini sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. Alors, il existe une constante $M > 0$ telle que*

*$\forall f : \mathcal{X} \cdots \rightarrow \mathcal{X}$ application birationnelle telle que $\forall n > 0, Z(f^n) \cap Z(f^{-n}) = \emptyset$
 $\forall P \in \mathcal{X}(K)$ f -périodique nous avons :*

$$1 \leq n_{f,P} \leq M$$

Il suffit de montrer le résultat pour une composante connexe de l'adhérence de Zariski de l'orbite d'un point périodique, en effet le corps résiduel étant fini le nombre de composantes connexes de l'adhérence de l'orbite peut être majoré indépendamment du point et de l'application. À chaque composante connexe on associe de manière unique un point fermé p_i dont on majore la période par une constante $n - i$ ne dépendant que du schéma. On considère un point de l'orbite de départ dont la spécialisation est ce point fermé, on considère l'orbite de ce point sous l'action de f^{n_i} et on majore la période. La majoration s'obtient d'abord modulo une puissance de p , puis il s'agit de montrer que la puissance peut elle-même être majorée.

3.3. Un résultat général pour certains automorphismes réguliers. —

Théorème 3.7. — *Soit K un corps p -adique.*

– *Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour toute application de Hénon spéciale ϕ , pour tout $P \in \mathbb{A}^r(K)$ ϕ -périodique alors :*

$$1 \leq n_{\phi, P} \leq M.$$

– *Soit $r \geq 3$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout automorphisme régulier spécial $\phi \in \mathbb{A}^r(K)$, pour tout $P \in \mathbb{A}^r(K)$ ϕ -périodique alors :*

$$1 \leq n_{\phi, P} \leq M.$$

La preuve de ce théorème découle du théorème 3.6 et de la proposition 3.3.

4. Preuve du résultat principal

4.1. Applications triangulaires. —

Définition 4.1. — Un automorphisme ϕ de $\mathbb{A}^r(K)$ est dit *triangulaire* s'il existe $F_i \in K[X_{i+1}, \dots, X_r]$ pour $1 \leq i \leq r-1$, $F_r \in K$ et $a_i \in K^*$ pour $1 \leq i \leq r$ tel que :

$$\begin{aligned} \phi(X_1, \dots, X_r) = & (a_1 X_1 + F_1(X_2, \dots, X_r), a_2 X_2 + F_2(X_3, \dots, X_r), \\ & \dots, a_{r-1} X_{r-1} + F_{r-1}(X_r), a_r X_r + F_r). \end{aligned}$$

Notation. — Soit μ_K le groupe (fini) des racines de l'unité de K .

Lemme 4.2. — *Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour toute application triangulaire ϕ de $\mathbb{A}^r(K)$, pour tout point ϕ -périodique P : $1 \leq n_{\phi, P} \leq M$.*

Nous déterminons les itérés, et considérons deux cas suivant que l'un au moins des coefficients a_i est ou non une racine de l'unité et concluons en utilisant le fait que μ_K est un groupe fini.

Si dans la définition 2.1, nous nous plaçons en dimension quelconque r et considérons des automorphismes réguliers spéciaux à la place des applications de Hénon spéciales, nous définissons alors le groupe : $GTRS(K, r)$.

4.2. Conjugaison par un automorphisme affine. — Le lemme suivant a été utilisé par L. Denis [Den95] dans le cas des corps de nombres, sa démonstration est également immédiate dans le cas des corps p -adiques.

Lemme 4.3. — Soient ψ, ϕ des automorphismes de l'espace affine $\mathbb{A}^r(K)$. Supposons qu'il existe f un automorphisme de l'espace affine $\mathbb{A}^r(K)$ tel que $\psi = f^{-1}\phi f$ alors :

P est ψ -périodique si et seulement si $f(P)$ est ϕ -périodique.

4.3. Preuve du théorème A. — La preuve du théorème A découle immédiatement du théorème 3.7, et des lemmes 4.2, 3.2 et 4.3.

De plus, nous obtenons un résultat analogue en dimension quelconque.

Théorème 4.4. — Soit K un corps p -adique. Il existe $M(K) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \phi \in \text{GTRS}(K, r)$ et pour tout point ϕ -périodique P nous avons :

$$0 \leq n_{P, \phi} \leq M.$$

5. Lien avec la dynamique arithmétique

Proposition 5.1. — Si pour tout corps p -adique K , il existe $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^r(K))$, pour tout point ϕ -périodique P , nous avons : $1 \leq n_{\phi, P} \leq M$, alors,

si F est un corps de nombres, pour tout $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A}^r(F))$:

l'ensemble des points ϕ -périodiques isolés est fini.

Pour démontrer ce résultat on utilise la décomposition suivante de l'ensemble des points ϕ -périodiques $B(\phi, K) = \bigcup_{N \geq 1} B_N(\phi, K)$, avec $B_N(\phi, K) := \{P \in \mathbb{A}^n(K); \phi^N(P) = P\}$, c'est un fermé, il admet donc un nombre fini de points isolés. Le théorème A nous permet de dire que la réunion est finie, de plus tout corps de nombres peut être plongé dans un corps p -adique, d'où le résultat.

La proposition nous permet conjointement avec le théorème A d'obtenir le corollaire B. Nous obtenons à l'aide du théorème 4.4, l'analogue du corollaire B pour le groupe $\text{GTRS}(K, r)$.

Références

- [B00] R. L. Benedetto, p -adic dynamics and Sullivan's no wandering domains theorem. *Compositio Math.* 122, no. 3, 281–298 (2000).
- [B01] R. L. Benedetto, Hyperbolic maps in p -adic dynamics. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 21 (2001), no. 1, 1–11 (2001).
- [C85] P. M. Cohn, *Free rings and their relations* (2nd ed.) London Mathematical Society Monographs 19 (1985)
- [Den95] L. Denis, Points périodiques des automorphismes affines, *J. reine angew. Math.* 467, 157–167 (1995).
- [F02] N. Fakhruddin, Boundedness results for periodic points on algebraic varieties, *arXiv :math.NT/0212200* (2002).
- [FM89] S. Friedland, J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory Dynamical systems* 9, 67–99 (1989)
- [HS00] M. Hindry, J. Silverman, *Diophantine geometry, an introduction*, Graduate Texts in Mathematics 201, Springer Verlag (2000).

- [J42] H. W. E. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. reine angew. Math. 184, 161-174 (1942).
- [M70] L.G. Makar-Limanov, On automorphisms of certain algebras. Candidate's dissertation, Moscou 1970.
- [M1] S. Marcello, Sur les propriétés arithmétiques des itérés d'automorphismes réguliers, C. R. Acad. Sci. Paris, t.331, Série I, 11-16 (2000)
- [M2] S. Marcello, Sur la dynamique arithmétique des automorphismes de l'espace affine, Bulletin de la S.M.F. 31 229-257 (2003).
- [M3] S. Marcello, Géométrie, points rationnels et itérés des automorphismes de l'espace affine Preprint MPIM 103 (2003).
- [M86] J.S. Milne, Abelian varieties, 103-15 in Arithmetic geometry, ed Cornell-Silverman Springer-Verlag (1986).
- [MS95] P. Morton, J. Silverman, Periodic points, multiplicities and dynamical units J. reine angew. Math. 461 81-122 (1995).
- [R03] J. Rivera-Letelier, Dynamiques des fonctions rationnelles-sur des corps locaux 147-230 in geometric methods in dynamics II éditeurs W. de Melo, M. Viana, J-C. Yoccoz, Astérisque 287 (2003).
- [S99] N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , Panoramas et Synthèses 8 (S.M.F.), 97-195 (1999) .
- [Si94] J. Silverman, Geometric and arithmetic properties of the Hénon map, Math. Z. 215, 237-250 (1994).

1 février 2008

SANDRA MARCELLO, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111, Bonn, Deutschland,
E-mail : marcello@mpim-bonn.mpg.de